**РОЗДІЛ. ТЕОРІЯ СКІНЧЕННИХ АВТОМАТІВ**

**1. Дискретний перетворювач інформації.**

**Детерміновані функції**

На рисунку 1 зображено дискретний перетворювач інформації









**Рис. 1.** *Дискретний перетворювач інформації: x*1,*x*2, *...*, *xn* – *входи,* *f* – *вихід*

На входи подаються вхідні сигнали 0 або 1, на виході знімається вихідний сигнал 0або 1.

Дискретний перетворювач працює синхронно. Це означає, що у кожний із дискретних моментів часу 1, 2, ... , *t* по кожному входу надходить, а на виході знімається рівно по одному символу з множини {0,1}.

На проміжку часу від 0 до *Т* дискретний перетворювач переробляє систему вхідних скінчених послідовностей із 0 та 1:

*α*1(1) *α*1(2) *α*1(3) *... α*1(*Т*)

*α*2(1) *α*2(2) *α*2(3) *... α*2(*Т*)

*. . .*

*αn*(1) *αn*(2) *αn*(3) *... αn*(*Т*)

у вихідну скінчену послідовність із 0та 1: *γ*(1) *γ*(2) *γ*(3)*... γ*(*Т*)*.*

Проміжок часу роботи дискретного перетворювача може бути як завгодно великим. У зв’язку з цим зручно розглядати нескінченні послідовності 0 і 1. Множину всіх нескінченних послідовностей із 0 і 1 позначають {0,1}*ω*.

Кожний дискретний перетворювач синхронної дії фізично реалізує деяку функцію від *n* змінних *f*(*x*1, *x*2,*…* , *xn*)*.*

Функція, що визначена на наборах(*α*1, *α*2, *... αn*),де *αі *{0,1}*ω, і =*,та набуває значення з множини{0,1}*ω*,називається *детермінованою (функцією без випередження)*, якщо при довільному *t* член вихідної послідовності *γ(t*) однозначно визначається першими *t* членами вхідних послідовностей:

*α*1(1) *α*1(2) *α*1(3) *... α*1(*t*)

*α*2(1) *α*2(2) *α*2(3) *... α*2(*t*)

*...*

*αn*(1) *αn*(2) *αn*(3) *... αn*(*t*)*.*

Множина усіх детермінованих функцій позначається *Рд.*

***Приклад***

**1.** Чи є детермінованою функція *y = x*1 *+ x*2, яка реалізує додавання двох нескінченних послідовностей із 0 та 1.

*Розв’язання*

Значення функції *y = x*1 *+ x*2 визначається шляхом використання звичайного алгоритму додавання двійкових чисел, але з нескінченною кількістю розрядів.

. . . *α*1(*t*) … *α*1(3) *α*1(2) *α*1(1)

+

. . . *α*2(*t*) . . . *α*2(3) *α*2(2) *α*2(1)

----------------------------------------

. . . *γ*(*t*) . .. *γ*(3) *γ*(2) *γ*(1) .

Очевидно, що *γ*(*t*) однозначно визначається першими *t* членами доданків, тому ця функція детермінована.

*Відповідь:* функція *y = x*1 *+ x*2детермінована.

**2. Задання детермінованих функцій за допомогою дерев**

**та діаграм Мура**

Табличне задання детермінованих функцій майже неможливе. Використовуючи властивості детермінованих функцій, їх можна задавати за допомогою певним чином занумерованих дерев.

Нехай *f*(*x*1, *x*2,…, *xn*)*Рд*.. Із кореня дерева ξ0 виходить в’язка з 2*n* орієнтованих ребер. Ці ребра утворюють перший ярус. Кожне ребро першого яруса веде у вершину, з якої виходить в свою чергу в’язка з 2*n*ребер, які утворюють другий ярус і т. д. Вершини, які є кінцями *k*-го яруса, відносяться до *k*-го яруса. Вершина ξ0 вважається вершиною 0-го яруса.

Ребра кожної в’язки нумеруються зліва направо числами 0, 1, 2, ...,2*n −* 1у десятковій системі числення. Ці номери біля ребер не записуються.

Ребро *k*-го яруса зображає *k*-ті члени відразу всіх вхідних послідовностей. Потрібно номер ребра записати у двійковій системі числення, тоді перша цифра номера дає значення *k*-го члена першої послідовності, друга цифра – значення *k*-го члена другої послі­довності і т. д.

Отже, будь-який маршрут у дереві зображає цілком визначені вхідні послідовності. І навпаки, кожному набору з *n* вхідних послідовностей у дереві відповідає маршрут, який іде від кореня ξ0 по ребру першого яруса до відповідної вершини першого яруса, далі по ребру другого яруса до відповідної вершини другого яруса і т. д.

***Приклад 1***

Із дерева вхідних послідовностей будується *навантажене дерево – дерево із занумерованими ребрами.*

Для цього кожному ребру дерева певним чином приписується символ 0 або 1 і тим самим задається функція, яка відображає послідовності із 0і 1 у послідовність із 0 і 1. Можна показати, що ця функція детермінована. І навпаки, будь-яка детермінована функція може бути задана за допомогою дерева з занумерованими ребрами. Для цього біля кожного ребра *k*-го яруса ставиться член γ(*k*) вихідної послідовності, який однозначно визначається першими *k-*членами вхідних послідовностей. Ці члени вхідних послідовностей зображаються маршрутом, який починається у корені ξ0 і закінчується в кінці обраного ребра *k*-го яруса.

***Приклад 2***

Сукупність усіх маршрутів, які виходять із ξта йдуть у вищі яруси, породжує дерево з коренем ξ, яке називається *піддеревом* даного дерева.

Два піддерева з коренями ξ1 та ξ2 називаються *еквівалентними*, якщо =.

Еквівалентні піддерева при накладанні одне на одне збігаються разом із нумерацією ребер. Введення відношення еквівалентності піддерев дозволяє множину всіх піддерев даного дерева розбити на класи еквівалентності.

Число класів еквівалентності, на яке розбивається множина всіх піддерев даного навантаженого дерева, називається *вагою дерева* і, відповідно, *вагою детермінованої функції*.

Детермінована функція  називається *обмежено-детер­мінованою* або *функцією із скінченною пам’яттю*, якщо вона має скінченну вагу.

Для навантажених дерев вводиться *нумерація вершин*. Для цього класи еквівалентності нумерують числами 0, 1, *…p* так, щоб клас, у який потрапляє усе дерево, мав номер 0. Далі розглядають вершину ξ і визначають клас, в який потрапляє дерево із коренем ξ. Нехай *k* номер цього класу, тоді вершині ξ присвоюють номер *k.*

Щоб побудувати *зрізане дерево*, йдуть довільним маршрутом від кореня ξ0 до вершини, у якій деякий номер перший раз повторюється і у цій вершині відсікається маршрут. Лишається лише його початковий відрізок від кореня ξ0 до цієї вершини. Така операція здійснюється для кожного маршруту.

Якщо у зрізаному дереві для обмежено-детермінованої функції ото­тожнити вершини з однаковими номерами, то отримуємо *діаграму Мура.*

У діаграмі Мура ребрам приписуються пари чисел (*А*, ).Перше число – номер ребра у десятковій системі числення, тобто член вхідної послідовності; друге число – це число, приписане цьому ребру, тобто член вихідної послідовності.

Вершини діаграми Мура називаються *станами обмежено-детермінованої функції.*

***Приклад 3***